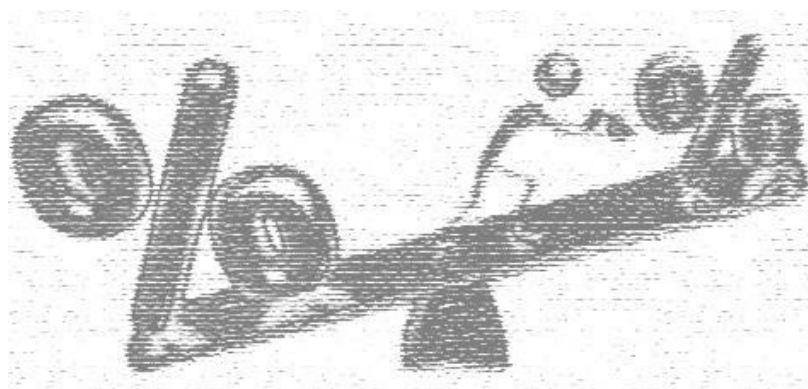


# IL CALCOLO NUMERICO PER IL TAEG

Definizioni e relazioni per l'impostazione del calcolo  
alla base dei finanziamenti

*Mario Marobin*  
Aprile 2018

PREMESSA.....	2
FORMULA DI CALCOLO .....	2
GENESI FORMULA DI CALCOLO .....	2
DEFINIZIONE FORMALE DEL TAEG.....	3
METODO NUMERICO DI INVERSIONE FORMULA.....	4
CONCLUSIONI .....	5



## PREMESSA

Le disposizioni di Banca d'Italia sulla trasparenza dei finanziamenti comprendono anche le spese connesse al conto corrente di appoggio. Allo scopo viene definito il TAEG, tasso annuale effettivo globale, che tiene conto delle spese di istruttoria, di documentazione, dei bolli, delle imposte, della tenuta conto e altro. Il TAEG è un tasso puramente virtuale che non viene utilizzato per il calcolo delle rate ma usato come indicatore a fini comparativi fra diverse proposte di finanziamento. Il TAEG si aggiunge al TAN, tasso annuale nominale, e al TAE, tasso annuale effettivo. Il TAEG è maggiore del TAE che a sua volta è maggiore del TAN.

## FORMULA DI CALCOLO

Il calcolo dei tassi di interesse annuali TAEG e TAE ruota tutto attorno all'equazione (1) con le condizioni (2) e (3) mentre il TAN è dato dalla relazione (4).

$$A - Z = (r + z) \cdot (1 + i)^{-\frac{n}{k}} \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-\frac{n}{k}}}{1 - (1 + i)^{-\frac{1}{k}}} \quad (1)$$

$$Z > 0 \text{ and } z \geq 0 \rightarrow i = TAEG \quad (2)$$

$$Z = 0 \text{ and } z = 0 \rightarrow i = TAE \quad (3)$$

$$k \cdot (\sqrt[k]{1 + TAE} - 1) = TAN \quad (4)$$

**A** è l'importo finanziato con **Z** che include tutte le spese iniziali di apertura del credito. **r** è la rata costante che viene restituita periodicamente con **z** le eventuali spese periodiche associate. **n** sono le rate totali del finanziamento mentre **i** è il tasso di interesse annuale. **k** è la frequenza annuale delle rate e assume i valori 1, 2, 3, 4, 12 rispettivamente per rate annuali, semestrali, quadrimestrali, trimestrali e mensili.  $n/k$  rappresenta così gli anni e le frazioni di anni del finanziamento in accordo con il tasso di interesse annuale **i** utilizzato nella formula.

L'equazione (1) risolta rispetto il tasso annuale di interesse **i** fornisce i tassi TAE e TAEG sotto le prime due condizioni (2) e (3). Il TAN della relazione (4) deriva dalle definizioni di equivalenza finanziaria dei tassi di interesse composti e semplici espressi dalle relazioni (5) e (6).

$$(1 + i_k)^k = 1 + i = 1 + TAE \quad (5)$$

$$k \cdot i_k = TAN \quad (6)$$

L'inversione della formula (1) rispetto le variabili **A**, oppure **r** o **n** è banale. L'inversione rispetto la variabile **i**, oggetto del nostro discorso, non è ottenibile in via analitica ma solo attraverso una opportuna approssimazione numerica che analizzeremo più avanti.

## GENESI FORMULA DI CALCOLO

Per un prestito che comporta la restituzione **R** a fine periodo viene anticipato un importo inferiore  $A=R(1-s)$  con tasso di sconto **s** compreso fra 0 e 1. Per un investimento attuale **A** viene restituito a fine periodo l'importo maggiorato  $R=A(1+i)$  con tasso di interesse **i** compreso fra 0 e 1. L'investimento è la funzione inversa del prestito perché da

$$R = A(1 + i) = R(1 - s)(1 + i)$$

si ottiene la relazione fondamentale che lega fra loro i tassi di sconto  $s$  e quelli di interesse  $i$ .

$$(1 - s) = (1 + i)^{-1} \quad (7)$$

Il termine  $(1-s)$  è chiamato fattore sconto e il termine  $(1+i)$  fattore di interesse. Per un prestito più generico con restituzione di  $n$  rate costanti  $r$  a fine periodo si applica l'iterazione di composizione

$$\begin{aligned} a_1 &= r(1 - s) \\ a_2 &= (r + a_1)(1 - s) = r(1 - s) + r(1 - s)^2 \\ a_3 &= (r + a_2)(1 - s) = r(1 - s) + r(1 - s)^2 + r(1 - s)^3 \\ &\dots \end{aligned}$$

$$A = r \sum_{t=1}^{t=n} (1 - s)^t = r \sum_{t=1}^{t=n} (1 + i)^{-t} \quad (8)$$

La generalizzazione della iterazione porta all'espressione (8) che assume la duplice forma mostrata in forza della relazione (7) che lega fra loro i tassi di sconto e di interesse. Le sommatorie rappresentano la serie ridotta di una serie geometrica con risultato desumibile dal seguente esempio generalizzabile poi nella forma (9).

$$x + x^2 + x^3 = (1 - x) \frac{x + x^2 + x^3}{1 - x} = \frac{x + x^2 + x^3 - x^2 - x^3 - x^4}{1 - x} = x \frac{1 - x^3}{1 - x}$$

$$A = r(1 - s) \frac{1 - (1 - s)^n}{1 - (1 - s)} = r(1 + i)^{-1} \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{1 - (1 + i)^{-1}} \quad (9)$$

E' prassi comune usare per i prestiti il fattore di interesse  $(1+i)$  al posto del fattore di sconto  $(1-s)$ . Si riconosce così nella seconda parte della relazione (9) la forma della più generale relazione (1) sui prestiti a rate periodiche.

## DEFINIZIONE FORMALE DEL TAEG

Il Ministro del Tesoro con decreto ministeriale 8 luglio 1992 definisce il tasso annuo effettivo globale TAEG come il tasso che rende uguale, su base annua, la somma del valore attuale di tutti gli importi che compongono il finanziamento erogato dal creditore alla somma del valore attuale di tutte le rate del rimborso. In formula:

$$\sum_{k=1}^m \frac{A_k}{(1 + i)^{t_k}} = \sum_{k'=1}^{m'} \frac{A'_{k'}}{(1 + i)^{t_{k'}}} \quad \text{articolo 2 comma 1 DM 8/7/1992} \quad (10)$$

$k$  numero d'ordine di un prestito

$k'$  numero d'ordine di una rata di rimborso

$A_k$  importo del prestito numero  $k$

$A_{k'}$  importo della rata di rimborso numero  $k'$

$m$  numero d'ordine dell'ultimo prestito

$m'$  numero d'ordine dell'ultima rata di rimborso

$t_k$  intervallo in anni e frazioni di anno tra la data del prestito numero 1 e le date degli ulteriori prestiti da 2 a  $m$

$t_{k'}$  intervallo in anni e frazioni di anni tra la data del prestito numero 1 e le date dei rimborsi da 1 a  $m'$   
 $i$  tasso globale effettivo che può essere calcolato quando gli altri termini dell'equazione sono noti

Il decreto stabilisce che il TAEG includa le spese di istruttoria e apertura pratica, le spese di riscossione dei rimborsi e di incasso delle rate, le spese per assicurazioni e garanzie e il costo delle attività di mediazione di terzi. Tutte questi costi sono da considerare pertanto inclusi, con il dovuto segno, negli importi  $A_k$  e  $A_{k'}$ . Per rimborso con rate costanti  $A'_{k'}=r$  di un unico prestito  $A_1=A$ , che da definizione assegna  $t_{k'}=0$ , la relazione (10) diventa

$$A - Z = (r + z) \sum_{k'=1}^{m'} \frac{1}{(1 + i)^{t_{k'}}} \quad (11)$$

con  $Z$  le spese istruttorie e accessorie e  $z$  le spese periodiche di riscossione rate. Nella relazione (11) si riconosce la forma della relazione (8) che conduce alla relazione iniziale (1) utilizzata per il calcolo numerico del TAEG. Il TAEG deve essere espresso in percentuale con due cifre decimali mentre tutti i calcoli intermedi devono contemplare 8 cifre decimali.

## METODO NUMERICO DI INVERSIONE FORMULA

Il metodo numerico di inversione della relazione (1) rispetto il tasso  $i$  è mostrato dallo pseudo codice riportato come Sub tassotaeg(). Viene definita come  $f(x)$  la relazione (1) eguagliata a zero con tutte le variabili  $A, Z, r, z, n, k$  inizializzate ai valori del problema con  $i$  unica incognita. Esiste un teorema sulla esistenza dello zero di una funzione che stabilisce che se una funzione continua in un intervallo  $[a,b]$  assume negli estremi dell'intervallo valori di segno discorde, ovvero  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , allora esiste un punto interno all'intervallo  $[a,b]$  dove la funzione si annulla.

```
Sub tassotaeg()
  a = 0.0001; b = 1; fx = 10
  Do While abs(fx) > 0.0001
    fa = f(a)
    fb = f(b)
    x = a - fa * (b - a) / (fb - fa)
    fx = f(x)
    If fa * fx < 0 Then b = x
    ElseIf fx * fb < 0 Then a = x
    Else Errore("zero non trovato")
    End If
  Loop
  Return x
End Sub
```

La relazione (1) è continua e monotona nel dominio  $i > 0$  e nell'intervallo  $[a,b]=[0.0001,1]$  troveremo sicuramente uno zero. Stabilito un punto  $x$  interno all'intervallo  $[a,b]$  si ottiene la sua suddivisione in due semi intervalli  $[a,x]$  e  $[x,b]$ . Si discrimina poi quale dei due semi intervalli attribuisce nei sui estremi valori discordi alla funzione  $f(x)$ . Il processo ripetuto iterativamente converge rapidamente a una soluzione con  $f(x)$  minore di un  $\epsilon$  dato. Il punto  $x$  può essere il punto mediano dell'intervallo  $[a,b]$  oppure l'intersezione con l'asse  $i$  della corda che unisce gli estremi  $f(a)$  e  $f(b)$  della curva in oggetto come nell'esempio riportato. Esiste un ulteriore metodo che al posto della corda utilizza l'intersezione con l'asse  $i$  della tangente alla curva condotta da un estremo  $f(a)$  utilizzando, oltre la  $f(x)$ , anche la sua derivata  $f'(x)$ . I tre metodi, della mediana, della corda e della tangente,

sono equivalenti come efficacia di convergenza. La macro `tassotaeg()`, previa definizione e inizializzazione delle variabili  $A, Z, r, z, n, k$  restituisce il TAEG. La medesima macro con  $Z=z=0$  restituisce il tasso TAE. La relazione (4) fornisce infine il TAE.

Come esempio prendiamo un finanziamento di 20.000 € da restituire con 72 rate mensili di 350 €. Spese istruttoria 250 € con 5 € di spese per ciascuna rata. I risultati della equazione (1) sotto le condizioni (2) e (3) e della conseguente equazione (4) sono riassunti nella prima delle due tabelle riportate e confrontati con quelli ottenibili dalla funzione di MS Excel `TASSO(n;-r;A)`. Le colonne  $a, b, d$  forniscono tutte il medesimo tasso TAN. La colonna  $b$  riporta ovviamente per definizione i valori TAEG e TAE identici. Nella colonna  $c$  infine si è ipotizzato un anticipo  $A$  diminuito delle spese istruttorie, una rata  $r$  aumenta con la spesa periodica di rata e le spese  $Z$  e  $z$  nulle. Il TAEG risultante, uguale al TAE, coincide con il TAEG della colonna  $a$  come prevedibile osservando la forma della relazione (1).

mesi	Macro <code>tassotaeg()</code>			MS Excel	
	a	b	c	d	e
A	20.000	20.000	19.750	12*TASSO(72;-350;20.000)	12*TASSO(72;-355;19.750)
r	350	350	355		
n	72	72	72		
Z	250	0	0		
z	5	0	0		
TAEG	0,0927	0,0823	0,0927		
TAE	0,0823	0,0823	0,0927		
TAN	0,0793	0,0793	0,0890	0,0793	0,0890

anni	Macro <code>tassotaeg()</code>			MS Excel	
	a	b	c	d	e
A	20.000	20.000	19.750	TASSO(6;-4317;20.000)	TASSO(6;-4322;19.750)
r	4317	4317	4322		
n	6	6	6		
Z	250	0	0		
z	5	0	0		
TAEG	0,0838	0,0793	0,0838		
TAE	0,0793	0,0793	0,0838		
TAN	0,0793	0,0793	0,0838	0,0793	0,0838

A completamento la seconda tabella riportata ipotizza il medesimo finanziamento da restituire con 6 rate annuali da 4317 €. I calcoli della macro `tassotaeg()` sono fatti assegnando  $k=1$  al posto di 12 nell'equazione (1). In questo caso osserviamo ancora che i TAEG delle colonne  $a$  e  $c$  sono identici mentre TAE e TAN coincidono fra loro in ognuno dei singoli casi.

## CONCLUSIONI

Le funzioni finanziarie di MS Excell sembrano non fornire il TAEG a giustificazione di questa memoria che sintetizza alcuni concetti base di matematica finanziaria utili a studenti che non seguono questa materia perché non prevista nei loro piani di studio superiore. Per un dato finanziamento, stabilito il numero di rate e l'interesse annuale si calcola la rata con l'inversione della relazione (1) posto  $Z=z=0$ . Il calcolo del TAEG passa poi attraverso una procedura iterativa tipo `tassotaeg()`.

Per contro la funzione MS Excell `TASSO(n;-r;A)` restituisce un tasso di interesse congruente con la periodicità del finanziamento e può essere utilizzata per calcolare i tre tassi annuali, avvalendoci della relazioni di equivalenza finanzia (5) e (6), nel modo seguente:

$$TAN = k * TASSO(n; -r; A) \quad (12)$$

$$TAE = (1 + TASSO(n; -r; A))^{k-1} \quad (13)$$

$$TAEG = (1 + TASSO(n; -r - z; A - Z))^{k-1} \quad (14)$$

La funzione  $TASSO(n;-r;A)$  di MS Excel viene calcolata automaticamente per iterazione e se i risultati successivi non convergono dopo un prefissato numero di tentativi restituisce il codice di errore #NUM!. La memoria fa pertanto luce su aspetti non scontati dell'uso del foglio elettronico per il calcolo del TAEG con macro o con le sue funzioni finanziarie e fornisce un illustre esempio di problema matematico non risolvibile per via analitica ma solo con tentativi numerici (algoritmo). Si rifletta su come si poteva fare a suo tempo prima dell'avvento dei computer.