SULLE ORIGINI DEI LOGARITMI E DELLA COSTANTE «e»

Ci proponiamo di fare un salto a ritroso a cavallo fra il XVI e il XVII secolo per analizzare le condizioni che hanno portato all'identificazione della costante «e» attraverso i logaritmi, anche se l'autore della scoperta, Nepero, non se ne rese conto. Solo diversi decenni dopo la morte di Nepero, Huygens, Jakob Bernoulli e Leibniz elaborano la notazione esponenziale e definiscono il logaritmo come funzione inversa introducendo la costante e. Nei paragrafi che seguono analizzeremo parte del percorso che ha portato Nepero a pubblicare, nel 1614 e 1618, le due opere «*Mirifici logarithmorum canonis descriptio*» e «*Mirifici logarithmorum canonis constructio*» sui logaritmi a base $1/e$.

NEPERO E LA NASCITA DEI LOGARITMI

Joanne Nepero nasce in Scozia nel 1550 e inizia a frequentare la St. Andews University nel 1563 senza tuttavia completare gli studi. Gira per l'Europa fino a stabilirsi definitivamente nel 1574 ad amministrare i suoi vasti possedimenti terrieri a Gartness, in Scozia. La matematica era per lui solo un passatempo. A quel tempo la trigonometria era sviluppata quasi nella forma a noi oggi nota ed era molto usata per la cartografia e i calcoli astronomici. La precisione dei calcoli trigonometrici si spingeva fino all'uso di sette cifre significative nelle tavole dei seni/coseni con evidente laboriosità nelle corrispondenti moltiplicazioni.

Verso il 1590 Nepero viene a conoscenza delle allora recenti formule di prostaferesi, elaborate presso l'osservatorio astronomico danese di Tycho Brahe, che trasformano il prodotto di due seni/coseni nella somma di corrispondenti funzioni riducendo enormemente la laboriosità dei calcoli. Da qui ha origine il proposito di Nepero di perfezionare un metodo più generale per la semplificazione dei calcoli trigonometrici che si completerà, dopo oltre vent'anni, con la pubblicazione delle sue opere sui già citati «*Mirifici logarithmorum*».

Sempre a quel tempo era noto che sommare gli esponenti di potenze con la medesima base equivaleva alla moltiplicazione delle corrispondenti potenze. Nepero associa a questo l'idea di sincronizzare opportunamente una progressione geometrica e una aritmetica, come nell'esempio riportato in figura 1. La progressione geometrica è a valori decrescenti e minori di 1, che possono richiamare i valori delle funzioni trigonometriche seno e coseno; chiaramente le notazioni $y = 0{,}5^x$ e $x = log_{0,5}\, y$, riportate per chiarezza, erano sconosciute al tempo.

$y = 0{,}5^x$ progressione geometrica ragione 0.5	$x = \log_{0,5} y$ progressione aritmetica ragione 1
1	0
0,5	1
0,25	2
0,125	3
0,0625	4
0,03125	5
0,015625	6
0,0078125	7
0,00390625	8
0,001953125	9
0,0009765625	10

Figura **1** – Il risultato della moltiplicazione 0,25 x 0,0625 = 0,015625 si desume dalla somma degli indicatori della corrispondente progressione aritmetica

IL MODELLO CINEMATICO

Il lavoro di Nepero inizia con le definizioni di progressione aritmetica e geometrica, intese ciascuna come il moto di un punto che si sposta su un segmento. Più precisamente:

Definizione 1. *Una linea cresce aritmeticamente quando il punto mobile che la costruisce aggiunge sempre la medesima quantità in intervalli di tempo uguali* [Nepero,1614]

Definizione 2. *Una linea decresce geometricamente quando il punto mobile che la percorre taglia via a sinistra, in tempi uguali, una quantità che è sempre la stessa proporzione di quanto rimane da percorrere a destra* [Nepero, 1614]

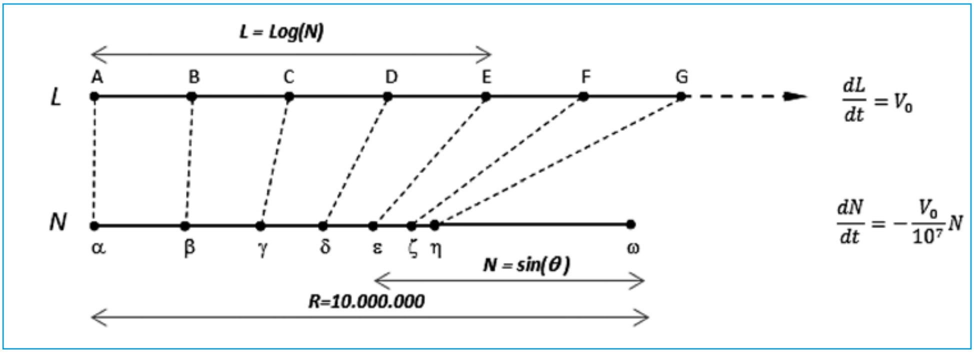

Figura **2** – Rappresentazione della progressione aritmetica e geometrica secondo Nepero

Con riferimento alla figura 2 negli stessi istanti nei quali il punto mobile L tocca i punti $B, C, D, \ldots$ spostandosi a velocità costante V_0, il punto mobile N tocca a velocità decrescente i corrispondenti punti $\beta, \gamma, \delta, \ldots$ Il segmento $\alpha\omega$ ha lunghezza 10^7. La velocità del punto N è in ogni istante, a meno di un fattore di normalizzazione $V_0/10^7$, uguale alla distanza di N dal punto di arresto finale ω. In questo modo la velocità iniziale su α è V_0 e quella finale su ω è nulla.

La progressione geometrica, che nelle intenzioni di Nepero dovrebbe rappresentare i valori del seno di un arco, non può avere una «risoluzione» larga come quella mostrata nell'esempio di figura 1 e, pertanto, Nepero sceglie una ragione quanto più vicina possibile a 1, con un valore pari a $0{,}9999999 = 1\text{-}10^{-7}$. A quel punto per semplificazione di scrittura introduce un fattore di scala, assegnando il valore di 10^7 al raggio della circonferenza trigonometrica. $L(N)$ è la simbologia che adotteremo per i logaritmi di Nepero del 1614 che iniziano con $L(10^7) = 0$ in corrispondenza del seno di 90°. Le notazioni differenziali aggiunte in figura 2 per le velocità dei due punti L e N erano ovviamente sconosciute all'epoca.

LA PRIMA TABELLA

Nepero parte quindi con la costruzione di una prima progressione geometrica composta da 101 elementi a_i mostrati nella seconda colonna della figura 3, che decrescono a partire da 10^7. È interessante notare che per il calcolo degli elementi Nepero usa un artificio che gli evita le moltiplicazioni per 0,9999999 perché, osservando che

$$a_{i+1} = a_i 0{,}9999999 = a_i(1 - 10^{-7}) = a_i - a_i 10^{-7},$$

il calcolo si riduce a una banale divisione per 10^7 e una successiva sottrazione come nello schema riportato sulla destra di figura 3.

i	$a_{i+1}=a_i(1\text{-}10^{-7})$	$L_1(a_i)$
0	10000000,00000000	0,00000000
1	9999999,00000000	1,00000005
2	9999998,00000010	2,00000010
3	9999997,00000030	3,00000015
4	9999996,00000060	4,00000020
5	9999995,00000100	5,00000025
6	9999994,00000150	6,00000030
7	9999993,00000210	7,00000035
8	9999992,00000280	8,00000040
9	9999991,00000360	9,00000045
10	9999990,00000450	10,00000050
11	9999989,00000550	11,00000055
...	....	.....
...	....	.....
97	9999903,00046565	97,00000485
98	9999902,00047535	98,00000490
99	9999901,00048515	99,00000495
100	9999900,00049505	100,00000500

$$\begin{array}{rl} 10.000.000{,}0000000 & - \\ 1{,}0000000 & = \\ \hline 9.999.999{,}0000000 & - \\ 0{,}9999999 & = \\ \hline 9.999.998{,}0000001 & - \\ 0{,}9999998 & = \\ \hline 9.999.997{,}0000003 & - \\ 0{,}9999997 & = \\ \hline 9.999.996{,}0000006 & \end{array}$$

Figura **3** – Prima tabella di Nepero con, a destra, lo schema per il calcolo degli elementi a_i

La progressione geometrica rappresenta il seno di angoli compresi fra 90° e 89,75° con una risoluzione media di circa 2 millesimi di grado. La tabella così concepita ha poca utilità, ma probabilmente consente a Nepero di formalizzare le prime proprietà sui nascenti logaritmi. La progressione aritmetica associata, riportata nella terza colonna, ha una ragione pari a 1,00000005 individuata da Nepero con un modello cinematico particolare che gli consente di stabilire i limiti entro i quali si trova il logaritmo di un numero N prossimo a 10^7. Il risultato di questo modello è:

$$(10^7 - N)\frac{10^7}{N} > L(N) > 10^7 - N \qquad (1)$$

che per $N = 9.999.999$ diventa $1{,}0000001 > L(N) > 1$. Nepero assegna pertanto la media 1,00000005 fra i due estremi come ragione della progressione aritmetica $L_1(a_i)$. A completamento della figura 3 si fa notare, come esempio, che $a_3 \times a_6 = a_9$ perché $L_1(a_3) + L_1(a_6) = L_1(a_9)$. Le parentesi graffe a fianco della tabella indicano esempi di un'altra importante proprietà dei logaritmi che Nepero definisce come:

Posizione 36. Logaritmi equidistanti sono di seni in proporzione [*Nepero*, 1619] (2)

che spieghiamo con l'esempio di $a_{11}/a_8 = 0{,}9999997$ associato a $L_1(a_{11}) - L_1(a_8) =$ $= 3{,}00000015$. Altri due qualsiasi elementi delle tabelle distanti fra loro di tre posizioni forniranno gli stessi risultati, come a_{100}/a_{97} con $L_1(a_{100}) - L_1(a_{97})$.

LA SECONDA TABELLA

Nella prima tabella, che copre solamente un arco di 0,25°, il rapporto a_{100}/a_0 vale, con buona approssimazione, $0{,}99999 = 1-10^{-5}$. Con questa nuova ragione Nepero costruisce allora una seconda progressione geometrica composta da 51 elementi b_i mostrati nella seconda colonna di figura 4.

i	$b_{i+1}=b_i(1-10^{-5})$	$L_2(b_i)$
0	10.000.000,0000000	0,0000000
1	9.999.900,0000000	100,0005000
2	9.999.800,0010000	200,0010000
3	9.999.700,0030000	300,0015000
4	9.999.600,0060000	400,0020000
...	....	....
...	....	....
48	9.995.201,1278271	4.800,0240000
49	9.995.101,1758158	4.900,0245000
50	9.995.001,2248040	5.000,0250000

$$\begin{array}{r} 10.000.000{,}0000000\ - \\ 100{,}0000000\ = \\ \hline 9.999.900{,}0000000\ - \\ 99{,}9990000\ = \\ \hline 9.999.800{,}0010000\ - \\ 99{,}9980000\ = \\ \hline 9.999.700{,}0030000\ - \\ 99{,}9970000\ = \\ \hline 9.999.600{,}0060000 \end{array}$$

Figura 4 – Seconda tabella di Nepero con, a destra, lo schema per il calcolo degli elementi b_i

La risoluzione questa volta è cento volte più grossolana e copre i valori dei seni di archi compresi fra 90° e 88,19°. Si evidenzia ancora il fatto che per il calcolo degli elementi b_i Nepero usa ancora l'artificio che gli evita le moltiplicazioni per 0,99999. Per trovare la ragione della corrispondente progressione aritmetica $L_2(b_i)$ Nepero non utilizza più la relazione (1) ma dimostra che la differenza di due logaritmi $x, y,$ con $x < y,$ è delimitata da:

$$10^7 \frac{y-x}{x} > L(x) - L(y) > 10^7 \frac{y-x}{y} \tag{3}$$

Con questa relazione si trova $0{,}00049505505302 > L_2(b_1) - L_1(a_{100}) > 0{,}00049505505300$. Vista la trascurabile differenza, Nepero prende il valore 0,0004950 e lo somma a $L_1(a_{100})$ per assegnare il valore risultante 100,0005 come ragione della nuova progressione aritmetica $L_2(b_i)$.

LA TERZA TABELLA

Nella seconda tabella, che copre un arco 1,81°, il rapporto b_{50} / b_0 vale, con buona approssimazione, 0,9995. Con questo valore Nepero costruisce allora una terza progressione geometrica che suddivide in 69 sottotabelle contenenti ciascuna 21 elementi (figura 5). Questa terza tabella con $21 \times 69 = 1449$ elementi copre un arco di circa 60°. La progressione geometrica è spezzata in 69 sottoprogressioni di ragione 0,9995 con i primi elementi di ciascuna di queste in rapporto di $0{,}99 = 1\text{-}10^{-2}$ fra loro $(c_{0,1}/c_{0,0} = c_{0,2}/c_{0,1} = \ldots = 0{,}99)$. Questo è l'artificio escogitato da Nepero per calcolare i 1449 elementi della progressione geometrica con una successione di divisioni per 100 con sottrazione al posto di ben più laboriose moltiplicazioni per 0,9995. Nepero si ferma alla 69-esima tabella (seno di 29,99°) perché, pur non conoscendo la funzione logaritmica, si accorge dell'andamento asintotico dei suoi calcoli al decrescere del numero N. Infatti i numeri (seni), decrescenti in progressione geometrica minore di 1, diventano sempre più ravvicinati e per coprire archi uguali servono sempre più elementi con una crescita non lineare (logaritmica).

Come già visto per la seconda tabella la ragione della corrispondente progressione aritmetica da associare si trova con la relazione (3) mettendo a confronto l'ultimo elemento b_{50} della seconda tabella con il secondo elemento $c_{1,0}$ della terza tabella. Inserendo i valori abbiamo $1{,}22541675 > L_3(c_{1,0}) - L_2(b_{50}) > 1{,}22541660$ che, aggiunti come media al logaritmo $L_2(b_{50})$, forniscono il valore 5001,250416 per $L_3(c_{1,0})$ con il quale per somme successive si costruisce la terza colonna della sottotabella 0.

i	$c_{i+1,0}=0{,}9995c_{i,0}$	$L_3(c_{i,0})$
0	10.000.000,0000000	0,00
1	9.995.000,0000000	5.001,25
2	9.990.002,5000000	10.002,50
3	9.985.007,4987500	15.003,75
4	9.980.014,9950006	20.005,00
5	9.975.024,9875031	25.006,25
6	9.970.037,4750094	30.007,50
..	......	.....
..	......	.....
19	9.905.426,2911689	95.023,76
20	9.900.473,5780233	100.025,01

i	$c_{i+1,1}=0{,}9995c_{i,1}$	$L_3(c_{i,1})$
0	9.900.000,0000000	100.503,36
1	9.895.050,0000000	105.504,61
2	9.890.102,4750000	110.505,86
3	9.885.157,4237625	115.507,11
4	9.880.214,8450506	120.508,36
5	9.875.274,7376281	125.509,61
6	9.870.337,1002593	130.510,86
..	......	.....
..	......	.....
19	9.806.372,0282572	195.527,12
20	9.801.468,8422431	200.528,37

Figura **5** – Prime due sottotabelle delle 69 costituenti la Terza tabella di Nepero

Per il completamento dei logaritmi dei seni minori di 30° Nepero costruisce un'ulteriore tabella (tabella ridotta) che, al posto di progressioni geometriche e aritmetiche, usa rapporti prestabiliti di seni $(1:2, 1:4, 1:8, 1:10, 1:20, 1:40, \ldots)$ con corrispondenti differenze di logaritmi. In questo modo, in base all'enunciato (2) e alla relazione (3), risulta possibile calcolare il logaritmo di un seno piccolo in modo mirato invece di accedere ad una ipotetica ed enorme terza tabella estesa al di sotto dei 30°.

Nepero, con il completamento della tabella ridotta, procede al calcolo dei $90\times 60 = 5400$ logaritmi dei seni da 0 a 90° di minuto primo in minuto primo, utilizzando congiuntamente alle tabelle la relazione (3). Le conseguenti *tavole dei logaritmi* sono organizzate in pagine con sette colonne (figura 6). La prima colonna riporta l'arco trigonometrico in gradi e minuti primi, con il corrispondente seno e logaritmo in seconda e terza colonna. La quinta e sesta colonna riportano logaritmo e seno dell'arco complementare $(90-\alpha)$ trascritto nella settima colonna. In questo modo sulla stessa linea si hanno i logaritmi del seno e del coseno dell'arco riportato nella prima colonna. La quarta colonna riporta la differenza fra i logaritmi del seno e del coseno che corrisponde al logaritmo della tangente dell'arco di colonna 1: $L(\mathrm{sen}\alpha)-L(\cos\alpha)=L(\mathrm{sen}\alpha/\cos\alpha)=L(tg\alpha)$.

LA BASE $1/e$ DI NEPERO

È noto, per definizione di logaritmo, che se $\mathrm{Log}(x)-\mathrm{Log}(y)=1$ allora x/y è la base del logaritmo. Per i logaritmi di Nepero abbiamo un fattore di scala 10^7 con logaritmi crescenti al decrescere dei seni (funzione decrescente); pertanto se $L(x)-L(y)=10^7$ allora y/x è la base che corrisponde a $1/e$ per ogni x, y. Come esempio, dalla figura 6 che riporta gli estratti di due pagine delle tavole dei logaritmi di Nepero, possiamo calcolare:

$$L(\mathrm{sen}(10°\ 41'))-L(\mathrm{sen}(30°\ 16'))=16.853.428-6.851.285=10.0021.143\cong 10^7$$
$$\mathrm{sen}(10°\ 41')/\mathrm{sen}(30°\ 16')=1.853.808/5.040.253=0{,}36780=(1/e-8\cdot 10^{-5})\cong 1/e$$

L'errore su $1/e$, trascinato anche dall'errore su 10^7, è prossimo a 10^{-4}. I numeri (seni) delle tavole dei logaritmi di Nepero sono un insieme finito di elementi

(5400) costruiti come progressione geometrica di ragione 0,9995 (terza tabella) che possiamo ragionevolmente approssimare anche come $0{,}9999 = 1 - 1/10^4$.

Se a partire da 1 inseriamo 10^4 elementi nell'insieme finito, l'ultimo elemento vale $(1 - 1/10^4)^{10000} = 0{,}3678$ che differisce da $1/e$ per 10^{-4}, come abbiamo appena verificato. Se dall'insieme finito descritto passiamo a un insieme con infiniti elementi possiamo scrivere:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \tag{4}$$

Osserviamo pertanto che con n tendente a infinito la granularità delle tavole dei logaritmi passa da 0,9995 a un continuo 0,999999… Cambiando il segno al limite appena esposto si ottiene la celebre definizione della costante *e* attribuita in questa forma a Jakob Bernoulli nel 1690.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \tag{5}$$

Bernoulli scoprì la costante «*e*» indagando sugli interessi composti in risposta a una questione di merito che gli era stata posta. È oggi noto che il montante M di un capitale C, investito con interesse annuale r ricalcolato n volte per anno su un periodo di t anni è dato dalla relazione $M = C(1 + r/n)^{nt}$. Bernoulli generalizzò il problema come $M = (1 + 1/n)^n$ considerando un capitale unitario investito per un anno con interesse del 100%. Il risultato è 2 se si fa il computo a fine anno, sale a 2,25 per computo semestrale, arriva a $(1 + 1/12)^{12} = 2{,}613$ con computo mensile. Passando al limite con computo continuo, si arriva alla formulazione (5).

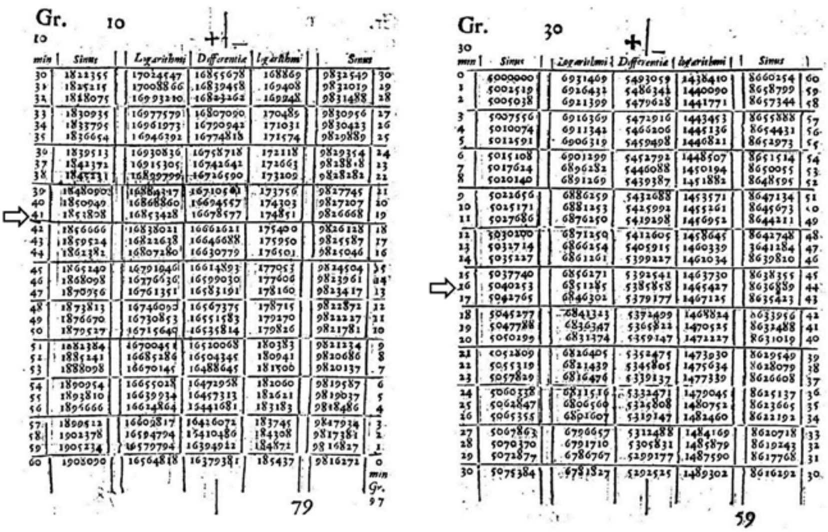

Figura **6** – Estratti della tavola dei logaritmi di Nepero per archi di 10° e 30° [Nepero, 1614]

La costante $1/e$ era ovviamente sconosciuta a Nepero, che era così arrivato a compilare le sue tavole dei logaritmi a partire dalla definizione cinematica di progressione aritmetica e di progressione geometrica, mostrate in figura 2. In tempi successivi le definizioni di Nepero si poterono scrivere in forma differenziale come [Hobson, 1914]:

$$\frac{dL}{dt} = V_0 \qquad \frac{dN}{dt} = -\frac{V_0}{10^7}N.$$

Dal rapporto di queste due velocità e successiva integrazione si ottiene:

$$\frac{dL}{dN} = -\frac{10^7}{N} \qquad L = -10^7 \int \frac{1}{N} dN = -10^7 \log_e N + C = 10^7 \log_{\frac{1}{e}} N + C$$

Da questo possiamo dire che il logaritmo in base $1/e$ di un numero varia come rapporto fra le velocità istantanee di due punti mobili, entrambi partiti con la stessa velocità V_0, ma poi mentre uno continua con moto rettilineo uniforme, l'altro rallenta con una velocità che, in ogni istante, è proporzionale alla distanza dal prefissato punto di arrivo (posto a una distanza pari a 10^7 dal punto di partenza). L'enunciato riprende con altre parole ciò che Nepero aveva scritto, a completamento delle sue definizioni di grandezze che variano aritmeticamente e geometricamente, come:

Posizione 25. Così il punto mobile che si avvicina geometricamente a quello fisso possiede una velocità proporzionale alla distanza dal punto fisso [*Nepero*1619]

LE BASI NORMALIZZATE

L'opera sui logaritmi pubblicata da Nepero nel 1614 suscitò lo stupore di Henry Briggs, professore di geometria a Londra, che decise di incontrare personalmente Nepero in Scozia, nell'estate del 1615. Si discusse sulla convenienza di assegnare 0 al logaritmo di 1, al posto dell'originale 10.000.000, e 1 al logaritmo di 10. In questo modo numeri e logaritmi assumevano verso crescente concorde mentre l'ordine di grandezza dei logaritmi diventava più intuibile tramite le potenze di 10. Nella seconda visita, l'estate successiva, Briggs illustrò a Nepero l'impostazione dei nuovi logaritmi decimali.

Nel 1617 Nepero moriva mentre Briggs pubblicava i suoi «*Logarithmorum chilias prima*» con gli spunti discussi con Nepero. Briggs diffuse *ampiamente l'uso dei suoi logaritmi in base 10 mentre l'intento di convertire i logaritmi di Nepero dalla base* $1/e$ alla base e senza il fattore di scala 10^7 non ebbe seguito immediato. Dalle considerazioni fin qui esposte possiamo enunciare il significato cinematico del logaritmo in base e riformulato con il nuovo criterio che assegna 0 al logaritmo di 1.

$$\frac{dL}{dt}=V_0 \qquad \frac{dN}{dt}=\frac{V_0}{1}N \qquad \frac{dL}{dN}=\frac{1}{N}.$$

Il logaritmo in base e di un numero varia come il rapporto fra le velocità istantanee di due punti L e N, mobili su una retta, che partono insieme. Il primo con velocità costante V_0, il secondo *accelera* da fermo fino raggiunge la velocità V_0 dopo aver percorso uno *spazio unitario* con una velocità che, in ogni istante, è uguale a V_0 per la distanza dal punto di *partenza*.

Mario Marobin
Federmanager Vicenza
pigrecoerrequadro@outlook.it

Bibliografia

[1] J. Nepero, *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, Edinburgh, 1614.
[2] J. Nepero, *Mirifici logarithmorum canonis constructio*, Edinburgh, 1619.
[3] E.W. Hobson, *John Napier and the invention of Logarithms*, Cambridge, University Press, 1914.