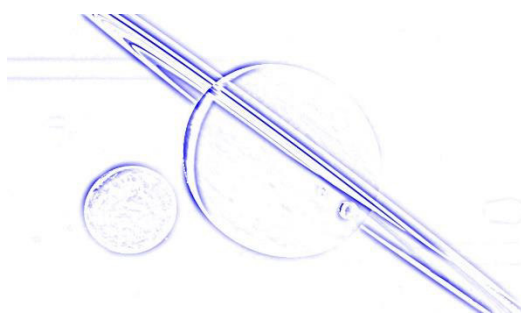
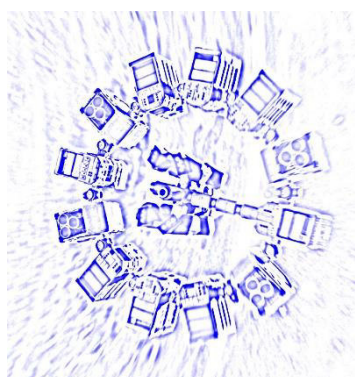


DILATAZIONE DEL TEMPO DI INTERSTELLAR

Riflessioni sulla nascita della relatività e il paradosso dei gemelli

Mario Marobin
Maggio 2016

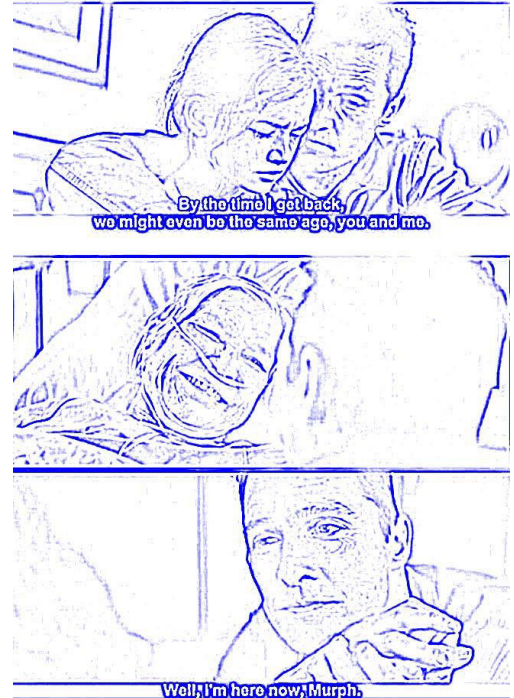
PREMESSA.....	2
LE EQUAZIONI DI MAXWELL.....	2
LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ.....	3
LA CINEMATICA DELLA RELATIVITA' DI EINSTEIN.....	4
CONTRAZIONE DELLE LUNGHEZZE E DILATAZIONE DEI TEMPI.....	5
COMPOSIZIONE DI VELOCITA'.....	6
IL PARADOSSO DEI GEMELLI.....	6
CONCLUSIONI.....	7



PREMESSA

“Interstellar” è un film di fantascienza del 2014 diretto da Christopher Nolan. In un futuro imprecisato un cambiamento climatico mette a repentaglio l’agricoltura. Un gruppo di scienziati, sfruttando un “wormhole” per superare i limiti fisici di un viaggio spaziale e coprire le immense distanze di un viaggio interstellare, partono alla ricerca di una nuova colonia vivibile. Il comandante Cooper promette alla figlia adolescente Murph di ritornare comunque. Quando Cooper rientra, dopo ventitré anni, ritrova la figlia Murph, ormai anziana e morente, soddisfatta per aver guidato l’esodo della popolazione umana nello spazio sulle indicazioni del padre in viaggio.

Il “wormhole”, o buco del verme, è una pura teoria topologica-gravitazionale basata sulla analisi della massa in termini di energia e campo elettromagnetico e che al momento non ha alcun riscontro sperimentale. Si immagini l’universo come una mela con un verme che percorre la sua superficie; se per raggiungere un punto opposto il verme penetra all’interno della mela esso percorre un diametro al posto di una semicirconferenza. Il foro sulla mela rappresenta il cunicolo spazio-temporale.



Diverso è il caso della differenza di età al rientro dal viaggio fra padre e figlia. Il fatto è spiegato scientificamente dalla teoria della relatività ristretta di Einstein forte di migliaia di conferme sperimentali verificate quotidianamente nei laboratori di ricerca sulle particelle elementari. Scopo di questa memoria è quello di spiegare in modo preciso ma divulgativo la teoria che gravita attorno alla contrazione dei tempi per i corpi in movimento ad altissima velocità. Ovviamente non abbiamo ancora lanciato esseri umani a velocità paragonabili a quella della luce per provare il caso Cooper-Murph.

LE EQUAZIONI DI MAXWELL

Non è così noto fra il pubblico comune ma le equazioni di Maxwell (1) rappresentano una pietra miliare nella storia della fisica al pari delle più celebri leggi della dinamica di Newton. Pubblicate nel 1864 esse descrivono formalmente tutta la conoscenza sui fenomeni elettrici e magnetici sperimentati fino a quel momento.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1)$$

In particolare le prime due equazioni rappresentano la legge di Gauss sui flussi dei campi elettrici e magnetici; la terza equazione è la legge di Faraday-Henry sull’induzione elettromagnetica e l’ultima la legge di Ampere sui campi magnetici generati da una corrente elettrica. La parte evidenziata in rosso sull’ultima equazione è il contributo aggiunto da Maxwell e privo di evidenza sperimentale. Il solo scopo dell’aggiunta fu quello di dare consistenza formale all’intera teoria di supporto ai fenomeni elettromagnetici noti; la quarta equazione diventa

così nota come legge di Ampere-Maxwell. Combinando fra loro la terza e quarta equazione di Maxwell si ricava l'equazione (2) che rappresenta un'onda che si propaga con velocità pari alla radice quadrata di $1/\mu_0\epsilon_0$.

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0\epsilon_0} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \quad (2)$$

L'onda venne denominata elettromagnetica ed era una pura congettura formale che trovò conferma sperimentale solo vent'anni più tardi con gli esperimenti condotti da Rudolf Hertz. La costante dielettrica ϵ_0 e la permeabilità magnetica μ_0 sono costanti fisiche universali dalle quali emerse che la velocità di propagazione dell'onda era prossima a quella della luce. Maxwell arrivò così a ipotizzare che la luce fosse un'onda elettromagnetica. Rammentiamo che la velocità della luce era al tempo nota sulla base di osservazioni di fenomeni astronomici e di misure ottiche di laboratorio condotte a partire dal XVII secolo.

Un'onda in genere si muove attraverso un mezzo come l'acqua per le onde marine o l'aria per quelle sonore. Prese allora piede con maggior consistenza l'ipotesi dell'esistenza del mezzo "etere luminifero" per la propagazione delle onde elettromagnetiche. L'etere era visto come un sistema di riferimento assoluto immobile nell'universo; i corpi celesti nel loro moto sarebbero stati sottoposti a una specie di vento d'etere. Una misura accurata della velocità della luce in direzione parallela e perpendicolare al vento d'etere dovrebbe pertanto fare emergere delle differenze a causa della composizione vettoriale delle rispettive velocità. I fisici americani Michelson e Morley approntarono un ingegnoso e accurato sistema di misurazione e nel 1887 eseguirono numerosi rilievi, tutti con esito negativo: nessuna differenza di velocità. Il risultato portò la comunità scientifica ad abbandonare il concetto di etere e a ipotizzare la velocità della luce come una costante universale.

LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ

Il principio di relatività noto era quello formulato da Galileo sulla trasformazione di coordinate e velocità fra il sistema stazionario $O(X,Y,Z)$ e il sistema $O'(X',Y',Z')$ in moto relativo uniforme con velocità v rispetto quello stazionario. Se il moto è nella direzione dell'asse x la trasformazione galileiana è:

$$\begin{aligned} x &= x' + vt & y &= y' & z &= z' ; & x' &= x - vt & (3) \\ t &= t' & & & & & t' &= t \end{aligned}$$

Applicando la trasformazione classica (3) alle equazioni di Maxwell (1) queste cambiavano forma nel nuovo sistema O' . Il fatto disorientò non poco la comunità scientifica che in un primo momento arrivò a supporre che le equazioni di Maxwell fossero sbagliate. Il fisico olandese Lorentz nel 1904 pubblicò la trasformazione (4) ricavata formalmente sotto l'ipotesi che le equazioni di Maxwell rimanessero inalterate nel passaggio da un sistema fisso O a uno mobile O' lungo la direzione x con velocità uniforme v .

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} & y &= y' & z &= z' ; & x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} & (4) \\ t &= \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} & & & & & t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned}$$

Si evidenzia che se la velocità v è molto piccola rispetto la velocità della luce c la trasformazione di Lorentz (4) si riduce alla trasformazione galileiana (3). La meccanica classica e la nuova teoria elettromagnetica rimanevano valide e bisognava ripensare i concetti di spazio e tempo in funzione della nuova trasformazione (4) introdotta.

LA CINEMATICA DELLA RELATIVITA' DI EINSTEIN

Su questo argomento nel 1905 il giovane Albert Einstein pubblica l'articolo "Sull'elettrodinamica di un corpo in movimento" passato alla storia come fondamento della relatività speciale. Einstein era certo della validità delle equazioni di Maxwell e sulla base delle evidenze sperimentali matura la convinzione della invarianza della velocità della luce. Riformulare i concetti di spazio e tempo in funzione dell'invarianza della velocità della luce era una strada lunga ma percorribile. Einstein non considerò mai la relatività speciale come un punto d'onore affermando che chiunque vi sarebbe prima o poi giunto in forza delle evidenze al tempo maturate. La parte cinematica della relatività ristretta comprende 5 paragrafi che trattano di:

1. Sincronizzazione di orologi con raggi luminosi e definizione di simultaneità di eventi
2. I due postulati della relatività con le ripercussioni su spazio e tempo
3. Deduzione trasformazioni di Lorentz
4. Contrazione lunghezze e dilatazione tempi per i corpi in movimento
5. Composizione delle velocità

La sincronizzazione degli orologi era un tema ricorrente all'epoca per la compilazione degli orari ferroviari del crescente traffico su rotaia. La trasposizione a ipotetici orologi che si scambiano un segnale luminoso a velocità finita in condizioni stazionarie e di moto relativo uniforme evidenzia che il concetto di simultaneità di due eventi è relativo: ciò che è simultaneo in un sistema di riferimento non lo è più in un secondo riferimento in moto relativo. Nella meccanica classica, dove le interazioni si propagano immediatamente a velocità infinita (non c), gli eventi simultanei lo sono in tutti i sistemi di riferimento.

Con riferimento alla figura (1) immaginiamo che un segnale luminoso venga emesso dal punto A dell'asse mobile X' in entrambe le direzioni. Siccome la velocità della luce è costante in tutte le direzioni e in tutti riferimenti il segnale arriva simultaneamente sui punti B e C che sono equidistanti da A. I due eventi di arrivo del segnale in B e C non sono visti simultaneamente da un osservatore fermo in O perché, per quest'ultimo, il raggio luminoso insegue il target C da una parte e va incontro al target B dall'altra parte.

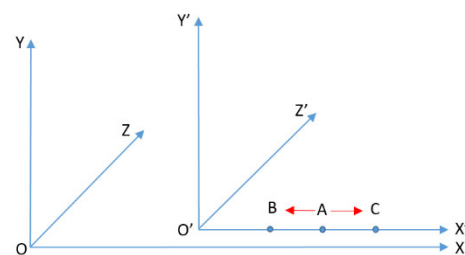


Fig. 1 – Sistemi di riferimento usati

Einstein allora postula che:

1. Le leggi della fisica assumano la stessa forma in ogni sistema di riferimento inerziale
2. La velocità della luce nel vuoto sia indipendente dal moto dell'osservatore o della sorgente

e passa alla definizione di lunghezza L di un righello a riposo nel suo sistema di riferimento rispetto a uno identico in moto relativo uniforme rispetto al primo. Allo stesso modo definisce il periodo T di un orologio a riposo rispetto a quello di un orologio in movimento. Con queste premesse nel terzo paragrafo ipotizza un esperimento ideale con un raggio di luce emesso dall'origine O' di un sistema di riferimento in moto uniforme verso un punto x' del suo asse; il raggio luminoso giunto su x' viene riflesso verso l'origine O' registrando gli istanti di emissione, riflessione e ritorno su O' . La sequenza viene valutata anche da un osservatore fermo su O. Con queste semplici presupposti e conseguenti sviluppi analitico-algebrici Einstein estrae, per altra via, le trasformazioni di coordinate (4) di Lorentz.

CONTRAZIONE DELLE LUNGHEZZE E DILATAZIONE DEI TEMPI

Il quarto paragrafo della relatività ristretta dimostra le ripercussioni sulle lunghezze e sugli intervalli di tempo come diretta conseguenza dell'ipotesi di invarianza della velocità della luce. Una sfera di raggio R fissata all'origine O' del sistema di riferimento mobile ha equazione $x'^2+y'^2+z'^2=R^2$. Le trasformazioni (4) per per $t=0$ mutano la sfera in un ellissoide di equazione:

$$\frac{x^2}{(\sqrt{1-v^2/c^2})^2} + y^2 + z^2 = R^2 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{R^2(\sqrt{1-v^2/c^2})^2} + \frac{y^2}{R^2} + \frac{z^2}{R^2} = 1 \quad (6)$$

L'asse x dell'ellissoide (6) vale $R\sqrt{1-v^2/c^2}$. La sfera in moto (a riposo su O') è vista dall'osservatore fermo O come un ellissoide con l'asse x contratto per il fattore radice di $1-v^2/c^2$. In generale la situazione è formalizzata come contrazione della lunghezza

$$L = L_0\sqrt{1-v^2/c^2} \quad (7)$$

con L_0 definita come "lunghezza propria" o lunghezza dell'oggetto in quiete rispetto proprio sistema di riferimento. Facciamo notare che se poniamo una sfera $x^2+y^2+z^2=R^2$ fissa sull'origine O del sistema stazionario otteniamo un ellissoide nel sistema mobile O' ma, con il concetto di lunghezza propria, vale sempre la relazione di contrazione delle lunghezze (7). In altre parole tutti gli osservatori concordano sulla lunghezza di regoli in quiete e in moto relativo uniforme ma non possono, rimanendo all'interno del loro sistema di riferimento, stabilire se il loro sistema è in quiete oppure in moto: pertanto le due situazioni non possono non essere perfettamente simmetriche.

Si immagini inoltre un orologio fermo sull'origine O' del sistema mobile che misura il tempo t' . Il ritmo di questo orologio, visto come t dall'origine stazionaria O , si deduce dall'ultima equazione delle trasformazioni di Lorentz (4) con la ovvia sostituzione $x=vt$ che rappresenta la distanza dall'origine O dell'orologio in moto relativo. Si ottiene:

$$t' = \frac{t-vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{t-v^2t/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = t\sqrt{1-v^2/c^2} \quad (8)$$

che viene in genere formalizzata come dilatazione del tempo

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (9)$$

con T_0 definito "tempo proprio" o tempo misurato dall'orologio in quiete rispetto al suo sistema di riferimento. Per l'osservatore fermo l'orologio in moto relativo ha un periodo T più grande di T_0 ovvero l'orologio in moto è più lento. Se invertiamo la situazione con un orologio fermo sull'origine O del sistema stazionario e valutiamo il tempo misurato da un osservatore posto in O' in moto relativo dobbiamo fare la sostituzione $x'=-vt'$ nella terza equazione della trasformazione di Lorentz (4) per ottenere sempre il medesimo risultato (9).

COMPOSIZIONE DI VELOCITA'

Nessuna velocità può superare la velocità c della luce nel vuoto. Supposto che un corpo si muova nel riferimento mobile O' con una velocità u' passiamo alla sostituzione $x'=u't'$ nelle trasformazioni di Lorentz (4) per ottenere la velocità trasformata u come:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{u't' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{t' + vu't'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10)$$

$$u = \frac{x}{t} = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \quad (11)$$

Nella relazione (11) per $u'=c$ si ottiene $u=c(c+v)/(c+v)=c$.

IL PARADOSSO DEI GEMELLI

Ritorniamo alla dilatazione dei tempi espressa dalla relazione (9) per i corpi in movimento. Immaginiamo un orologio a raggio luminoso composto da due specchi posti a distanza L sull'asse Y' del sistema di riferimento mobile O' . Con riferimento alla parte sinistra della figura (2) il raggio luminoso emesso in basso percorre la distanza L in un tempo T_0 per essere poi riflesso verso il basso e via di seguito.

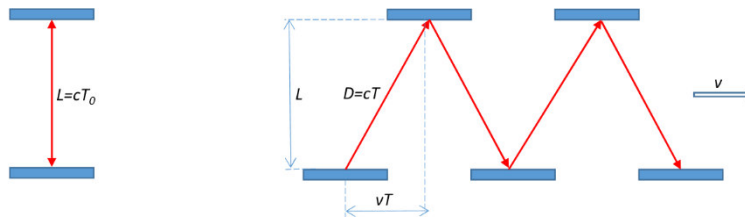


Fig.2 – Orologio luminoso nel sistema mobile S' e come viene visto dall'osservatore fisso S

T_0 rappresenta pertanto il periodo proprio del nostro orologio luminoso. Il medesimo orologio viene visto da un osservatore fermo nel sistema stazionario O come raffigurato nella seconda parte della figura (2) a causa del moto relativo. Per il teorema di Pitagora abbiamo la relazione $(cT)^2 = (vT)^2 + (cT_0)^2$ che sviluppata fornisce la già nota relazione (9) sulla dilatazione dei tempi. Il periodo T rilevato dall'osservatore fermo è più grande del periodo proprio T_0 . L'orologio su O' , per l'osservatore O , è più lento o in ritardo.

Se ribaltiamo la situazione mettendo l'orologio luminoso sul sistema stazionario O un osservatore su O' vedrà la medesima situazione mostrata in figura (2) e possiamo concludere che l'orologio su O , per l'osservatore O' , è più lento o in ritardo. Questa è una apparente contraddizione sostenuta al tempo dal filosofo inglese Herbert Dingle come "paradosso dei gemelli" che fece molto scalpore sulla stampa dell'epoca.

Un fratello gemello parte per un viaggio con una astronave a velocità elevatissima. Per quanto detto a termine viaggio il gemello astronauta risulterà più giovane del fratello rimasto a casa. Nella situazione ribaltata il gemello astronauta verifica che l'orologio terrestre è più lento rispetto il suo e, al suo ritorno, troverà il fratello rimasto a casa più giovane: dove sta la verità?

A titolo di esempio consideriamo un'astronave che con una velocità costante $v=0,8c$ raggiunga una stella distante 8 anni luce dal nostro pianeta e che poi inverta la rotta e ritorni sulla Terra. Di una coppia di fratelli gemelli, l'uno salga sull'astronave, mentre l'altro rimanga a Terra. Per $v = 0,8 c$ si ha che la radice di $1 - v^2/c^2$ vale 0,6; pertanto secondo la teoria della relatività ristretta, nell'astronave il tempo scorre al 60% del tempo terrestre. Quindi:

- a. Per il gemello terrestre l'astronave percorre 8 anni luce in $8/0,8=10$ anni e farà ritorno dopo 20 anni. Sull'astronave il tempo scorre più lento del 60% e il viaggio durerà $6+6=12$ anni. La differenza di età dei gemelli a termine viaggio sarà di 8 anni con il gemello terrestre più vecchio del gemello astronauta.
- b. Per il gemello astronauta è il sistema terra-stella a muoversi con velocità $v=0,8c$. Per effetto della contrazione relativistica delle lunghezze la distanza da percorrere è ridotta del 60% ovvero $8*0,6=4,8$ anni luce. Il tempo del viaggio sarà $(4,8+4,8)/0,8=12$ anni, esattamente come calcolato dal fratello terrestre.

A questo punto è lecito chiedersi perché non sia il tempo terrestre a rallentare del 60% visto che dall'interno dell'astronave è la terra che si muove con velocità $0,8c$. Il risultato, a conti fatti, vede il gemello astronauta più vecchio di 4,8 anni rispetto il fratello terrestre in contraddizione con quanto esposto nel primo caso (paradosso).

La soluzione del paradosso è che la questione non deve essere posta perché la relatività speciale ha sconvolto il concetto dello spazio tempo con la frantumazione della simultaneità degli eventi. La relatività indica che si deve prendere un sistema inerziale di riferimento consapevoli che eventi simultanei nel riferimento scelto non lo sono più in altri riferimenti. Nessun sistema di riferimento inerziale deve però considerarsi privilegiato e conseguentemente non si può stabilire univocamente in assoluto quale dei due gemelli sia più vecchio.

CONCLUSIONI

Il film, coerentemente con la teoria della relatività speciale, evidenzia la differenza di età fra padre e figlia ma non riporta l'effetto della contrazione delle lunghezze che dovrebbe far apparire il padre Cooper, al rientro dal viaggio interstellare, molto più piccolo e minuto rispetto gli altri protagonisti.

Riferimenti

- [1] A.Einstein – On the Electrodynamics of moving bodies - *Annalen der Physik*. 17:891 1905
- [2] R.Feynman – The Feynman Lectures on Physics – *Caltech* 1963
- [3] L.D. Landau – Fisica teorica vol 2 – *MIR Mosca* 1970